

Reg. No. :

Code No. : 20574 B Sub. Code : SMMA 51

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2021.

Fifth Semester

Mathematics — Core

ABSTRACT ALGEBRA — II

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. $T : V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ நேரியல் உருமாற்றத்தில்
 $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டது
என்றால், $\text{Ker} T =$ _____.
- (அ) $\{(0, 0, z) / z \in R\}$
(ஆ) $\{(0, y, 0) / y \in R\}$
(இ) $\{(x, 0, z / x, z \in R)\}$
(ஈ) $\{(x, y, z) / x, y, z \in R\}$

In Linear Transform of $T: V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ is defined as finite $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, $\text{Ker } T =$ _____.

- (a) $\{(0, 0, z) / z \in R\}$
- (b) $\{(0, y, 0) / y \in R\}$
- (c) $\{(x, 0, z/x, z \in R)\}$
- (d) $\{(x, y, z) / x, y, z \in R\}$

2. ஒரு திசையன் வெளி V இன் உள் வெளிகளான A மற்றும் B யை உள்ளடக்கிய மீச்சிறு உள்வெளியானது _____.

- (அ) $A \cup B$ (ஆ) $A \cap B$
- (இ) $A \Delta B$ (ஈ) $A + B$

The smallest subspace of a vector space V , which contains the subspaces A and B is _____.

- (a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$
- (c) $A \Delta B$ (d) $A + B$

3. $V_2(R)$ -ல், $S = \{(4, 0)\}$ என்க. எனில் $L(S) =$ _____.

- (அ) S (ஆ) $\{(x, 0) / x \in R\}$
- (இ) $\{(0, y) / y \in R\}$ (ஈ) $V_2(R)$

In $V_2(R)$, let $S = \{(4, 0)\}$. Then $L(S) =$ _____.

- (a) S (b) $\{(x, 0)/x \in R\}$
(c) $\{(0, y)/y \in R\}$ (d) $V_2(R)$

4. $L(L(S)) =$ _____.

- (அ) S (ஆ) $L(S)$
(இ) V (ஈ) $L^2(S)$

$L(L(S)) =$ _____.

- (a) S (b) $L(S)$
(c) V (d) $L^2(S)$

5. $rank T = \dim V$ எனில், Nullity $T =$ _____.

- (அ) 0 (ஆ) $\dim V$
(இ) 1 (ஈ) ∞

If $rank T = \dim V$, then Nullity $T =$ _____.

- (a) 0 (b) $\dim V$
(c) 1 (d) ∞

6. $V_3(R)$ ல் தரமான உள்ளீட்டு பெருக்கலில் $(1, 2, 3)$ என்ற திசையன் நீளம் _____.

- (அ) 6 (ஆ) 14
(இ) $\sqrt{14}$ (ஈ) 1

The norm of the vector $(1, 2, 3)$ In $V_3(R)$ with standard inner product is _____.

- (a) 6 (b) 14
(c) $\sqrt{14}$ (d) 1

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் _____.

- (அ) 1 (ஆ) 2
(இ) 3 (ஈ) 4

The rank of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ is _____.

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

8. தலைகீழ் அணி காண இயலாத அணி எது?

- (அ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ஆ) $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
(இ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ஈ) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

The inverse matrix does not exist for _____.

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

9. A ன் ஐகன் மதிப்புகள் $-1, 2, 5$ எனில் $(3A)^{-1}$ அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் _____.

- (அ) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}$ (ஆ) $-3, 6, 15$
(இ) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{15}$ (ஈ) $1, 4, 25$

If the eigen values of A are $-1, 2, 5$, then the eigen values of $(3A)^{-1}$, then _____.

- (a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}$ (b) $-3, 6, 15$
(c) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{15}$ (d) $1, 4, 25$

10. இருபடி வடிவம் $2x^2 - 4xy + 3y^2$ என்பதன் அணி வடிவம் _____.

- (அ) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (ஆ) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
(இ) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$ (ஈ) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

The matrix of the quadratic form $2x^2 - 4xy + 3y^2$ is

_____.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) F என்ற புலத்தின் மீது V ஒரு திசையன் வெளி என்க. ஒரு வெற்றற்ற உட்கணம் W , அனைத்து $u, v \in W$, $\alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha u + \beta v \in W$ என இருந்தால் மட்டுமே V -யின் உள்வெளி ஆகும் எனக் காட்டு.

Let V be a vector space over a field F . Show that a nonempty subset W of V is a subspace of V if and only if $u, v \in W$ and $\alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha u + \beta v \in W$.

Or

- (ஆ) F புலத்தின் மீது V மற்றும் W திசையன் வெளிகள் எனில் $L(V, W)$ என்பது V ல் இருந்து W க்கு அமையும் நேரியல் உருமாற்றங்கள் அனைத்தும் கொண்ட கணம் எனில், $L(V, W)$ என்பது F ன் மீது அமையும் திசையன் வெளி என நிரூபி.

Let V and W be vector spaces over a field F . Let $L(V, W)$ be the set of all linear transformations from V to W . Then prove that $L(V, W)$ is a vector space over F .

12. (அ) நேரியல் சார்புடைய கணத்தை உள்ளடக்கிய எந்தவொரு கணமும் நேரியல் சார்புடையது எனக் காட்டு.

Prove that any set containing a linear dependent set is also linear dependent.

Or

- (ஆ) ஒரே பரிமாணமுடைய இரு திசையன் வெளிகள் ஓரின சார்புடையவை என நிறுவுக. இதில் இரு திசையன் வெளிகளின் புலமும் F எனக் கொள்க.

Prove that any two vector spaces of the same dimension over a field F are isomorphic.

13. (அ) கிராம்-ஸ்மித் முறையைப் பயன்படுத்தி தரமான உள்பெருக்கல் உடைய $V_3(R)$ ன் அடிக்கணம் $\{v_1, v_2, v_3\}$. இதில் $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 3, 1)$, $v_3 = (3, 2, 1)$ என்பதற்கு அலகு நெறிம செங்குத்து அடிக்கணம் கட்டுக.

Apply Gram-Schmidt process to construct an orthonormal basis for $V_3(R)$ with the standard inner product for the basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ where $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 3, 1)$, $v_3 = (3, 2, 1)$.

Or

(ஆ) ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட பரிமாணமுடைய உள்பெருக்கல் வெளி V என்க. W அதன் உள்வெளி எனில் $V = W \oplus W^\perp$ என நிறுவுக.

Let V be a finite dimensional inner product space W be its subspace. Then prove that $V = W \oplus W^\perp$.

14. (அ) அணியின் தலைகீழ் காண் அடிப்படை உருமாற்ற

$$\text{முறைப்படி } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{using elementary}$$

transformations.

Or

(ஆ) கெய்லி ஹேமில்டன் தேற்றம் சரி பார்

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verify Cayley Hamilton's theorem for the

$$\text{matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. (அ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் இரு ஐகன்

மதிப்புகளைப் பெருக்கினால் -12 எனில் A -ன் ஐகன் மதிப்புகள் காண்.

The product of two eigen values of the matrix

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ is -12 . Find the eigen values

of A .

Or

(ஆ) ஒரு மெய் சமச்சீர் அணியின் சிறப்பியல்பு தீர்வுகள் அனைத்தும் மெய் என நிறுவுக.

Show that the characteristic roots of a real symmetric matrix are real.

SECTION C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) F என்ற புலத்தின் மீது V என்பது திசையன் வெளி என்க. W என்பது V ன் உள்வெளி எனில் நிறுவுக. V/W என்பது F மீது உள்ள ஒரு திசையன் வெளி.

Let V be a vector space over F and W be a subspace of V . Then prove that V/W is a vector space over F .

Or

(ஆ) நேரியல் உருமாற்றத்திற்கான அடிப்படைத் தேற்றம் கூறி நிறுவுக.

State and prove fundamental theorem of homomorphism.

17. (அ) F என்ற புலத்தின் மீது V ஒரு வெக்டர் வெளி. $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ என்ற கணம் V -யின் நேரியல் நீட்டம் என்க. $S_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ ஒரு நேரியல் சார்பில்லா திசையன்களின் கணம் என்றால் $m \leq n$ எனக் காட்டு.

Let V be a vector space over a field F . Let $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ span V . Let $S_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ be a linearly independent set of vectors in V . Then show that $m \leq n$.

Or

- (ஆ) V என்பது வரையறுக்கப்பட்ட பரிமாணமுடைய திசையன் வெளி என்க. A, B என்பவை V -யின் உள்வெளிகள் எனில், நிறுவுக $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$.

Let V be a finite dimensional vector space over a field F . Let A, B be subspaces of V . Then show that $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$.

18. (அ) ஒவ்வொரு வரையறுக்கப்பட்ட உள்பெருக்கல் வெளியும் ஓரலகு நெறிம செங்குத்து அடிக்கணம் கொண்டது என நிரூபி.

Prove that every finite dimensional inner product space has an orthonormal basis.

Or

- (ஆ) வரையறுத்த பரிமாணமுடைய உள்பெருக்கல் வெளியின் உள்வெளிகள் W_1 மற்றும் W_2 எனில், நிறுவுக $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$. மேலும் $W_1^\perp \cap W_2^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

If W_1 and W_2 are subspaces of a finite dimensional inner product space, show that $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ and $W_1^\perp \cap W_2^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

19. (அ) அணியின் தரம் காண். $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Find the rank of the matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Or

(ஆ) கெய்லி-ஹேமில்டன் தேற்றம் படி

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ அணிக்கு } A^{-1}, A^4 \text{ காண்.}$$

Using Cayley Hamilton's theorem for the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Find A^{-1}, A^4 .

20. (அ) ஐகன் மதிப்பு மற்றும் ஐகன் திசையன்கள் காண்

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Find the eigen values and eigen vectors of

$$\text{the matrix } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or

(ஆ) இருபடி வடிவம் மூலவிட்ட வடிவமாக குறுகுவதை லெக்ரான்ஜி முறைப்படி விளக்குக.

Explain the Lagrange's method of reducing quadratic form to a diagonal form.